



Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2023–2024

Fullt nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Hófst þú nám í framhaldsskóla árið 2022 eða fyrir?

Já (*Efra stig*) Nei (*Neðra stig*)

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Pau sem hófu nám í framhaldsskóla árið 2022 eða fyrir teljast til *efra stigs*. Önnur teljast til *neðra stigs*. Efstu nemendur á hvoru stigi fyrir sig komast áfram í lokakeppni.

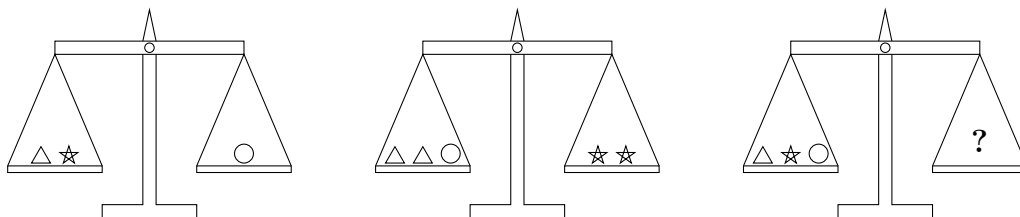
Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrir en ykkur er sagt að gera það.
- Þetta er **ekki próf**. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn. Krot á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Myndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri, hringfari og reglustika. **Notkun reiknivéla og síma er óheimil.**

Fyrsti hluti (30 stig)

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Merkið við í mesta lagi einn svarkost. Rétt svar gefur þrjú en eitt stig er dregið frá fyrir rangt. Það er nákvæmlega eitt rétt svar.

1. Inga á þríhyrninga, stjörnur og hringi. Tvö form af sömu gerð veða það sama. Vogirnar tvær hér að neðan eru í jafnvægi. Hvaða valkost mætti setja í stað spurningamerkis á þriðju voginni þannig að hún sé í jafnvægi?



- $\triangle \triangle \triangle \triangle \star$
 $\triangle \triangle \triangle \star$
 $\triangle \triangle \triangle \triangle \circ$
 $\triangle \triangle \triangle \circ$

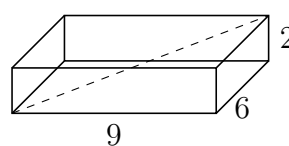
2. Í 16 manna teiti skáluðu allir gestir við alla hina nákvæmlega einu sinni. Hve oft var skálað?

- 30
 120
 225
 240

3. Hvað er næsta ártal sem er frumtala?

- 2025
 2027
 2028
 2031

4. Askjan til hægri er rétthyrnd á alla kanta. Lengd hennar er 9, breidd hennar 6 og hæð hennar 2. Hver er lengd brotastriksins frá horni í gagnstætt horn?



- 9
 10
 11
 12

5. Atli á helling af 1kr. 5kr. og 10kr. myntum. Hann langar í tyggjó sem kostar 25kr. Með hve mörgum ólíkum samsetningum getur hann borgað fyrir það?

- 9
 10
 11
 12

6. Á myndinni til hægri er svörtum þríhyrningum raðað upp í fimm raðir. Það eru 15 svartir þríhyrningar og 10 hvítir. Við myndina er bætt nokkrum nýjum röðum og nú eru 276 svartir þríhyrningar. Hvað eru hvítu þríhyrningarnir nú margir?

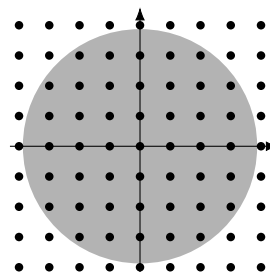


230 242 253 276

7. Hvert eftirfarandi brota er næst $\frac{3}{5}$ á talnalínunni?

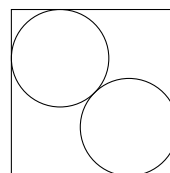
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$

8. Skoðum hringskífu með miðju í $(0, 0)$ og geisla af óþekktri lengd. Við teljum fjölda punkta (a, b) sem liggja innan í hringskífunni þannig að $a, b \in \mathbb{Z}$. Hvert af eftirfarandi gæti verið fjöldi punkta?



2017 2018 2019 2020

9. Tveir hringir innan í ferning snerta hvorn annan og tvær af hliðum ferningsins hvor. Hringirnir hafa báðir geisla af lengd 1. Hver er hliðarlengd ferningsins?



$1 + \sqrt{2}$ $2 + \sqrt{2}$ $2 - \sqrt{2}$ $4 + 2\sqrt{2}$

10. Ákvarðið gildi stærðarinnar $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$

$\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ $\frac{3}{2}$

Annar hluti (30 stig)

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki útskýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

Öll svör í þessum hluta eru jákvæðar heiltölur minni en 1000.

11. Tveir mangarar eru jafn ríkir. Einn á 5 rúbína, 5 perlur og 90 gullpeninga. hinn á 8 rúbína, 9 perlur og 48 gullpeninga. Rúbínar eru dýrari en perlur. Hvað er virði eins rúbíns og einnar perlu til samans í gullpeningum? [*Virði rúbína og perla eru bæði jákvæður heiltölufjöldi gullpeninga.*]

Svar: _____

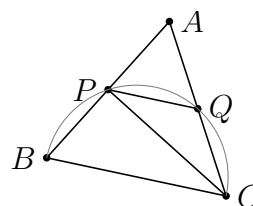
12. Hvað eru til margar heilar tölur n þannig að $(n+1)(n-2)$ deili $(n+3)(n-4)$?

Svar: _____

13. Í venjulegum spilastokki eru spil í 13 stærðum og hver stærð kemur fyrir í fjórum sortum (hjarta, spaða, tígli og laufi). Í spilinu Rommí er slagur 3 eða fleiri spil með sömu stærð eða slagur er 3 eða fleiri spil í röð af sömu sort. Hver er mesti fjöldi spila sem hægt er að hafa á hendi án þess að vera með slag?

Svar: _____

14. Þríhyrningur ABC er jafnhliða. Hálfhringurinn sem hefur miðstreng BC og liggur sömu megin miðstrengsins og A . Hann sker hliðarnar AB og AC í $P \neq B$ og $Q \neq C$. Hver er stærð hornins $\angle CPQ$ í gráðum talið?



Svar: _____

15. Tóta á tening með hliðarlengd 7. Hún á ferningslaga pappír sem hún ætlar að brjóta saman utan um tening (án þess að rífa) þannig að hann þeki allar hliðar teningsins. Brúnir pappírsins þurfa ekki að skarast. Pappírinn rétt dugur til að þekja teninginn. Hvert er flatarmál hans?

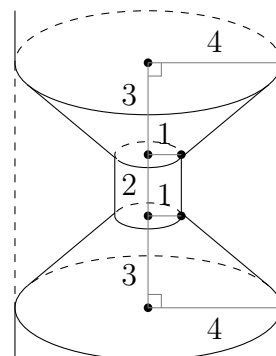
Svar: _____

Priðji hluti (40 stig)

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. **Hér ber að rökstyðja svörin.** Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

- 16.** Bjór er búinn að naga úr trjából form sem sést á myndinni. Formið er snúningssamhverft og allir hringir eru í plani við jörðina, sem tréð stendur hornrétt á. Hvert er það rúmmál sem bjórin hefur nagað burt?

[Ábending: Rúmmál keilu með hæð h og grunnflöt af radíus r er $\frac{1}{3}\pi hr^2$ og rúmmál sívalnings með sömu hæð og sama grunnflöt er πhr^2 .]



17. Sýnið að ef a, b, c, d eru rauntölur, stærri en 0, þá gildir

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4.$$

[Ábending: Ef x, y eru jákvæðar rauntölur þá gildir $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.]

18. Finnið öll $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ þannig að $11^k + 4^{k+1}$ sé frumtala.

- 19.** Andri og Björk spila leik þar sem í upphafi eru $n \geq 1$ hrúgur með $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ steinum hver. Í hverri umferð velur leikmaður tölu $k \geq 1$. Leikmaðurinn á þá að velja k hrúgur og fjarlægja þær úr leiknum, og svo velja k aðrar hrúgur og skipta hverri í tvær ekki tómar hrúgur. Fyrsti leikmaður til að geta ekki leikið tapar. Fyrir hvaða a_1, \dots, a_n getur Andri unnið ef hann leikur fyrst?

[*Hlutstig fást ef dæmið er aðeins leyst þegar n er slétt tala eða oddatala.*]